Parte 1, problemas con solución

1. Dado el siguiente modelo con efectos maternos para el individuo *i* con madre *j*:

$$P_{ij} = \mu_i + a_{oi} + a_{mj} + e_{mj} + e_{oi}$$

donde P_{ij} es el fenotipo del individuo; a_o, a_m, e_m y e_o son valores de cría y desvíos ambientales, directos y maternos, con varianzas σ^2_{Ao}, σ^2_{Am}, σ^2_{Em} y σ^2_{Eo}, respectivamente.
Asuma:

$$\mathrm{cov}(a_{oi}, a_{mj}) = \sigma_{AoAm} \quad \mathrm{cov}(e_{mj}, e_{oi}) = 0$$

y que valores de cría y efectos ambientales son normales e independientes. Considere el pedigree: 1 - -; 2 - -; 3 1 2; 4 1 2. Obtenga: a) Var(P_{32}); b) cov(P_{32}, P_{42}); c) cov ($a_{o2} + a_{m2}$, P_{32}). d) Var($P_{32} + P_{42}$) (35 ptos).

a) La idea era tomar el operador varianza:

$$\mathrm{Var}(P_{ij}) = \mathrm{Var}(a_{oi}) + \mathrm{Var}(a_{mj}) + 2\,\mathrm{cov}(a_{oi}, a_{mj}) + \mathrm{Var}(e_{mj}) + \mathrm{Var}(e_{oi}) + 2\,\mathrm{cov}(e_{mj}, e_{oi})$$

Y reemplazando para P_{32} tenemos que:

$$\mathrm{Var}(P_{32}) = \mathrm{Var}(a_{o3}) + \mathrm{Var}(a_{m2}) + 2\,\mathrm{cov}(a_{o3}, a_{m2}) + \mathrm{Var}(e_{m3}) + \mathrm{Var}(e_{o2}) + 0$$

$$\mathrm{Var}(P_{32}) = \sigma^2_{Ao} + \sigma^2_{Am} + 2(A_{23})\,\sigma_{AoAm} + \sigma^2_{Em} + \sigma^2_{Eo}$$

siendo A_{23} la relación de parentesco entre 2 y 3 que, como son madre e hijo, es igual a 0.5. Por lo tanto el resultado final es:

$$\mathrm{Var}(P_{32}) = \sigma^2_{Ao} + \sigma^2_{Am} + \sigma_{AoAm} + \sigma^2_{Em} + \sigma^2_{Eo}$$

b) cov(P_{32}, P_{42}):Dos formas de realizar este problema. En la primera de ellas emplearemos el operador covarianza de modo tal de obtener:

$$\mathrm{cov}(P_{32}, P_{42}) = \mathrm{cov}(a_{o3} + a_{m2} + e_{m2} + e_{o3}, a_{o4} + a_{m2} + e_{m2} + e_{o4})$$

Sólo debo considerar las covarianzas genéticas por un lado, y las covarianzas ambientales por otro lado, de forma tal que:

$$= \mathrm{cov}(a_{o3} + a_{m2}, a_{o4} + a_{m2}) + \mathrm{cov}(e_{m2} + e_{o3}, e_{m2} + e_{o4})$$

Por definición del problema tenemos que:

$$\mathrm{cov}(a_{o3} + a_{m2}, a_{o4} + a_{m2}) = \mathrm{cov}(a_{o3}, a_{o4}) + \mathrm{cov}(a_{o3}, a_{m2}) + \mathrm{cov}(a_{m2}, a_{o4}) + \mathrm{cov}(a_{m2}, a_{m2})$$

$$= A_{34}\,\sigma^2_{Ao} + (A_{32} + A_{24})\,\sigma_{AoAm} + A_{22}\,\sigma^2_{Am} = 0.5\,\sigma^2_{Ao} + (0.5 + 0.5)\,\sigma_{AoAm} + \sigma^2_{Am}$$

dado que 3 y 4 son hijos de 2. Para la parte ambiental:

$$\mathrm{cov}(e_{m2} + e_{o3}, e_{m2} + e_{o4}) = \mathrm{cov}(e_{m2}, e_{m2}) + \mathrm{cov}(e_{o3}, e_{o4}) = \sigma^2_{Em} + 0$$

Sumando covarianzas aditivas y ambientales resulta en:

$$\mathrm{cov}(P_{32}, P_{42}) = 0.5\,\sigma^2_{Ao} + \sigma_{AoAm} + \sigma^2_{Am} + \sigma^2_{Em}$$

Alternativamente y dado que los individuos son hermanos enteros:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \downarrow & \swarrow\searrow & \downarrow \\ 3 & & 4 \end{array}$$

podemos emplear la expresión de la covarianza con efectos maternos:

$$\mathbf{cov}(P_{XW}, P_{YZ}) = A_{XY}\,\sigma^2_{Ao} + (A_{XZ} + A_{YW})\,\sigma_{AoAm} + A_{WZ}\,\sigma^2_{Am} + \delta_{WZ}\,\sigma^2_{Em}$$

Tome X = 3, Y = 4, W = Z = 2 y $A_{34} = 0.5$, $A_{32} + A_{42} = 0.5 + 0.5 = 1$, $A_{22} = 1$ y $\delta_{22} = 1$, y obtendrá el mismo resultado que antes.

c) cov ($a_{o\,2} + a_{m\,2}$, P_{32}).

$$\mathbf{cov}(a_{o2} + a_{m2}, P_{32}) = \mathbf{cov}(a_{o2} + a_{m2}, a_{o3} + a_{m2} + e_{m2} + e_{o3})$$

$$= \mathbf{cov}(a_{o2} + a_{m2}, a_{o3} + a_{m2}) = A_{23}\,\sigma^2_{Ao} + (A_{22} + A_{23})\sigma_{AoAm} + \sigma^2_{Am} = \frac{1}{2}\sigma^2_{Ao} + \frac{3}{2}\sigma_{AoAm} + \sigma^2_{Am}$$

dado que $A_{22} = 1$ y $A_{23} = 1/2$.

d) Aquí tenemos que:

$$\mathrm{Var}(P_{32} + P_{42}) = \mathrm{Var}(P_{32}) + \mathrm{Var}(P_{42}) + 2\,\mathbf{cov}(P_{32}, P_{42})$$

Note que ya hemos obtenido ambas varianzas y la covarianza; sumando dos veces la respuesta en la parte a) (una para cada varianza) más dos veces la parte b) (la covarianza vá multiplicada por 2), tenemos que:

$$\mathrm{Var}(P_{32} + P_{42}) = 3\,\sigma^2_{Ao} + 4\,\sigma^2_{Am} + 4\,\sigma_{AoAm} + 4\,\sigma^2_{Em} + 2\,\sigma^2_{Eo}$$

2. Para el pedigree : 1 - -; 2 1 -; 3 1 2; 4 1 3; 5 4 3; 6 4 3. Indique: a) A_{15}, A_{36}; b)F_4; F_6;c) A_{55}.

	1	2	3	4	5	6
1	1	1/2	3/4	7/8	13/16	13/16
2	1/2	1	3/4	5/8	11/16	11/16
3	3/4	3/4	5/4	1	9/8	9/8
4	7/8	5/8	1	11/8	19/16	19/16
5	13/16	11/16	9/8	19/16	3/2	37/32
6	13/16	11/16	9/8	19/16	37/32	3/2

De la tabla surge que: a) A_{15} = 11/16; A_{36} = 9/8; b) F_4 = 3/8 ; F_6 = ½ y c) A_{55} = 3/2.