

## *Varianza de un promedio*

R.J.C. Cantet

Departamento de Producción Animal, Facultad de Agronomía, UBA

En la predicción del valor de cría de un individuo  $i$ , frecuentemente encontramos fuentes de información basadas en  $n$  datos, como por ejemplo, los promedios de sus hijos, o el promedio de sus nietos, o el de sus medio hermanos paternos, etc. Para calcular el Índice de Selección necesitamos conocer la varianza de ese promedio, donde los  $n$  datos *no son* independientes, puesto que los individuos a los que pertenecen se hallan emparentadas produciendo covarianzas genéticas. El propósito de esta nota es obtener una expresión para la varianza de un promedio de observaciones que siguen un modelo genético aditivo: sólo con valor de cría como único efecto genético.

Considere un modelo animal aditivo de predicción del valor de cría:

$$P_i = \mu + a_i + e_i \quad [1]$$

$$a_i \sim (0, \sigma_A^2) \quad e_i \sim (0, \sigma_e^2) \quad \text{cov}(a_i, e_i) = 0 \quad P_i \sim (\mu, \sigma_A^2)$$

El promedio  $P$ . es igual a:

$$P. = \frac{\sum_{j=1}^n P_i}{n} \quad [2]$$

Nuestro objetivo es obtener una expresión para  $\text{Var}(P.)$ . A tal efecto aplicaremos el operador varianza al promedio [2] de modo tal que:

$$\text{Var}(P.) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n P_i\right) \quad [3]$$

$$= \frac{1}{n^2} \left[ \text{Var}(P_1) + \dots + \text{Var}(P_n) + 2 \text{cov}(P_1, P_2) + 2 \text{cov}(P_{n-1}, P_n) \right] \quad [4]$$

$$+ 2 \text{cov}(P_{i1}, P_{i2}) + \dots + 2 \text{cov}(P_{ij}, P_{j'}) + \dots + 2 \text{cov}(P_{i(n_i-1)}, P_{i,n_i}) ]$$

Entonces necesitamos  $\text{Var}(P_i)$  y  $\text{cov}(P_i, P_{i'})$  donde  $i$  es un individuo distinto a  $i'$ . La primera es simplemente igual a:

$$\text{Var}(P_i) = \text{Var}(a_i) + \text{Var}(e_i) = \sigma_A^2 + \sigma_e^2 = \sigma^2 \quad [5]$$

Hay  $n$  varianzas iguales a [5] por considerar. En tanto que las covarianzas en [4] son iguales a:

$$\text{cov}(P_i, P_{i'}) = \text{cov}(a_i, a_{i'}) = A_{i,i'} \sigma_A^2 \quad [6]$$

siendo  $A_{ii'}$  la relación aditiva entre ambos individuos. Suponiendo que todos los individuos en el promedio están relacionados del mismo modo, tenemos  $n(n-1)$  covarianzas que considerar. Por lo tanto, reemplazando con [5] y [6] en [4] tenemos que:

$$\text{Var}(P.) = \left[ \frac{n(\sigma_A^2 + \sigma_e^2) + (n-1)n\sigma_A^2}{n^2} \right] \quad [7]$$

Tomando:

$$h^2 = \frac{\sigma_A^2}{\sigma^2} \quad \sigma_A^2 = h^2 \sigma^2$$

y simplificando la constante  $n$  en ambos miembros, finalmente la expresión [7] es igual a:

$$\text{Var}(P.) = \left[ \frac{1 + (n-1) A_{ii'} h^2}{n} \right] \sigma^2 \quad [8]$$